ΑΣΚΗΣΗ 2: ΝΔΟ (χωρίς ρητή επίλυση) ότι για $x \in \mathbb{R}$ κοντά στο 0 υπάρχουν θετικές λύσεις $y(x)$ της $x^2+y^2=1$ με $y'(x) = -\frac{x}{y(x)}$

ΛΥΣΗ

Εδώ $n=m=1$, $x_0=0$. $F(x,y)=x^2+y^2-1$, $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$

$F(x_0,y_0) = F(0,y_0) = y_0^2 - 1 = 0 \overset{y_0>0}{\Rightarrow} y_0 = 1$, έτσι ώστε $F(x_0,y_0)=0$

$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 2y \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y}(0,1) = 2 \neq 0$

$F \in C^\infty(\mathbb{R}^2) \underset{\text{ΘΠΣ}}{\Longrightarrow} (\exists \delta>0)(\forall x \in (-\delta,\delta))\ \exists!\ y(x) \in \mathbb{R}$:

: $F(x,y(x)) = x^2+y^2(x)-1=0$

και

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y(x)) = -\frac{1}{2y(x)} \cdot 2x = -\frac{x}{y(x)}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 3:

ΝΔΟ για $x,y,z \in \mathbb{R}$ κοντά στο 0 $\exists!\ z(x,y)$ της $x^4+2x\cos y+\sin z=0$ και υπολογίστε τις μερικές παραγώγους της z.

ΛΥΣΗ

Έστω $F(x,y,z) = x^4+2x\cdot\cos y+\sin z$, $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

Προφανής ρίζα η $x_0=y_0=z_0=0$ άρα $F(0,0,0)=0$ ①

$F \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$.

$\frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0) = \frac{\partial F}{\partial z}(0,0,0) = \cos 0 = 1 \neq 0$ ②

Από ①, ② $\overset{\text{ΘΠΣ}}{\Longrightarrow} \forall (x,y) \in B((x_0,y_0),\delta)\ \exists!\ z(x,y) \in \mathbb{R}$:

: $F(x,y,z(x,y)) = 0$

και

$$Dz(x,y) = \nabla z(x,y) = \left(\frac{\partial z}{\partial x}(x,y), \frac{\partial z}{\partial y}(x,y)\right) =$$

$$= -\frac{\frac{\partial F}{\partial(x,y)}(x,y,z(x,y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z(x,y))} \quad ③$$

$$\frac{\partial f}{\partial(x,y)}(x,y,z) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z), \frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z)\right) = (4x^3+2\cos y, -2x\sin y)$$

③ $\Rightarrow Dz(x,y) = \nabla z(x,y) = \dfrac{1}{\cos(z(x,y))}(4x^3+2\cos y, -2x\sin y)$

$\Rightarrow Dz(0,0) = -\dfrac{1}{1}(2,0)$ όπου $z(0,0)=z_0=0$

ΑΣΚΗΣΗ 4η

ΝΔΟ $\forall x \in \mathbb{R}$ κοντά στο 0 $\exists$ θετικές λύσεις $y(x), z(x)$ του συστήματος $\begin{cases} x^2+y^2-2z^2=0 \\ x^2+2y^2+z^2=4 \end{cases}$ και νβ και οι παράγωγοι

ΛΥΣΗ

Έστω

$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2+y^2-2z^2 \\ x^2+2y^2+z^2-4 \end{pmatrix}, (x,y,z)\in\mathbb{R}^2$$

$F\in C^\infty(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^2)$.

$x_0=0$. Άρα, θέλουμε να βρούμε θετικά $y_0=y(0)$ και $z_0=z(0)$, έτσι ώστε $F(x_0,y_0,z_0)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y_0^2=2z_0^2 \\ 2y_0^2+z_0^2=4 \end{cases} \Rightarrow 4z_0^2+z_0^2=4 \Rightarrow z_0=\dfrac{2}{\sqrt5}, z>0$
$\Rightarrow y_0=\dfrac{2\sqrt2}{\sqrt5}$

$$\frac{\partial F}{\partial(y,z)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y & -4z \\ 4y & 2z \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial(y,z)}\left(0,\frac{2\sqrt2}{\sqrt5},\frac{2}{\sqrt5}\right) = \begin{pmatrix} \frac{4\sqrt2}{\sqrt5} & -\frac{8}{\sqrt5} \\ \frac{8\sqrt2}{\sqrt5} & \frac{4}{\sqrt5} \end{pmatrix} = \frac{4}{\sqrt5}\begin{pmatrix} \sqrt2 & -2 \\ 2\sqrt2 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \det\dfrac{\partial F}{\partial(y,z)}(x_0,y_0,z_0)\neq 0 \xRightarrow{\text{ΘΠΣ}}$

$\Rightarrow (\exists\delta>0)(\forall x\in(-\delta,\delta))\ \exists!\begin{pmatrix} y \\ z\end{pmatrix}(x)\in\mathbb{R}^2$:

: $F(x,y(x),z(x))=0$

και από ΘΠΣ γνωρίζουμε επίσης ότι οι $\begin{pmatrix} y \\ z\end{pmatrix}:(-\delta,\delta)\to\mathbb{R}^2$ συνεχώς διαφορίσιμη

$\Leftrightarrow y:(-\delta,\delta)\to\mathbb{R}$, $z:(-\delta,\delta)\to\mathbb{R}$ συνεχώς διαφορ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ διαφορ $\Rightarrow$ συνεχείς και αφού $y_0=y(0)>0$ και $z_0=z(0)>0$, $\exists\tilde\delta\in(0,\delta)$: $y(x), z(x)>0$

$$D\binom{y}{x}(x) = \begin{pmatrix} y'(x) \\ z'(x) \end{pmatrix} = \cdot \frac{-\frac{\partial f}{\partial(y,x)}(x, y(x), z(x))}{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y(x), \quad)},$$

όπου $\frac{\partial f}{\partial(y,z)}(x,y,z) = 2\begin{pmatrix} y & -2z \\ 2y & z \end{pmatrix} \Longrightarrow$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial F}{\partial(y,z)}\right)^{-1} = \frac{1}{10yz}\cdot\begin{pmatrix} z & 2z \\ -2y & y \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2x \end{pmatrix}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 5η

Για $n=2$, $m=2$. ΝΔΟ $\exists$ θετικές λύσεις $u(x,y)$, $V(x,y)$ του συστήματος

$$\begin{cases} x^2+y^2-u^2-v^2=0 \\ x^2+2y^2+3u^2+4V^2=1. \end{cases}$$

ΛΥΣΗ

Έστω

$$f(x,y,u,v) = \begin{pmatrix} x^2+y^2-u^2-v^2 \\ x^2+2y^2+3u^2+4v^2-1 \end{pmatrix}, \quad F\in C^\infty(\mathbb{R}^4,\mathbb{R}^2)$$

Αφού, $x=y=0$ και $u=V=0$, $(x_0,y_0)=(0,0)$ γύρω από το οποίο θα ψάξω θετικές λύσεις $u(x_0)\cdot V(x_0)>0$ άτοπ.

Επομένη επιλογή (ερώτημα): Υπάρχουν $x\neq 0$ με $F(x,x,x,x)=\binom{0}{0} \Longleftrightarrow 10x^2=1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{\sqrt{10}}$ Άρα,

$x_0=y_0=\frac{1}{\sqrt{10}}$ και $u(x_0,y_0)=u_0=\frac{1}{\sqrt{10}}$

$V(x_0,y_0)=V_0=\frac{1}{\sqrt{10}}$

$$\frac{\partial f(x,y,u,v)}{\partial(u,v)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2u & -2v \\ 6u & 8V \end{pmatrix}$$

με $\det\frac{\partial f}{\partial(u,v)} = -16uv+12uv = -4uv \neq 0$

Εάν $u=u_0$, $V=V_0$

$\overset{\text{ΘΠΣ}}{\Longrightarrow} (\exists\delta>0)(\forall(x,y)\in B((\frac{1}{\sqrt{10}},\frac{1}{\sqrt{10}}),\delta)\ \exists!\binom{u}{v}(x,y)\in\mathbb{R}^2$

$F(x,y,u(x,y),v(x,y)) = \binom{0}{0} \Longrightarrow u_0=u(x_0,y_0),\ V_0=V(x_0,y_0) > 0$